МАТЕМАТИКА

УДК 512.548

О ЕДИНИЦАХ *n*-АРНОЙ ГРУППЫ

А.М. Гальмак

Могилёвский государственный университет продовольствия, Могилёв, Беларусь

ON IDENTITIES OF *n*-ARY GROUP

A.M. Gal'mak

Mogilev State University of Food Technologies, Mogilev, Belarus

В статье приводятся как уже известные, так и новые результаты о единицах n-арной группы.

Ключевые слова: *n-арная группа*, *единица*, *идемпотент*.

The known and new results on identities of n-ary group are staded in this paper.

Keywords: *n-ary group*, *identity*, *idempotent*.

Введение

n-Арные группы являются очень широким обобщением понятия группы. Поэтому в исследованиях по n-арным группам целесообразно выделять классы n-арных групп в той или иной мере близкие к классу всех групп. Одним из таких классов является класс всех n-арных групп, обладающих единицами. Согласно В. Дёрнте [1], элемент $e \in A$ n-арной группы $< A, [\ ] >$ называется *единицей* этой n-арной группы, если для любого $x \in A$ и любого $i = 1, 2, \ldots, n$ верно

$$[x\underbrace{e\ldots e}_{n-1}] = [ex\underbrace{e\ldots e}_{n-2}] = \ldots$$

$$\ldots = [\underbrace{e\ldots e}_{n-2}xe] = [\underbrace{e\ldots e}_{n-1}x] = x.$$

Это определение обобщает на n-арный случай определение единицы группы A как элемента $e \in A$ такого, что $ex = xe = x$ для любого $x \in A$.

В n-арной группе при $n > 2$ может быть только одна единица, но, в отличие от бинарного случая, может не быть единиц, а может быть и несколько единиц. Более того, существуют n-арные группы, в которых все элементы являются единицами. Ограничимся только одним примером.

***Пример* 0.1.** Пусть $n \geq 3$, $\mathbf{P}(M)$ – множество всех подмножеств некоторого множества M, $< \mathbf{P}(M), [\ ] >$ – n-арная группа, производная от абелевой группы $< \mathbf{P}(M), \Delta >$ с операцией симметрической разности

$$A \,\Delta\, B = (A \bigcup B) \setminus (A \bigcap B).$$

Единицей этой группы является пустое множество, а порядки всех неединичных элементов равны двум. Поэтому множество $\mathbf{E}(\mathbf{P}(M))$ всех единиц n-арной группы $< \mathbf{P}(M), [\ ] >$ имеет следующий вид

$$\mathbf{E}(\mathbf{P}(M)) = \begin{cases} \{\varnothing\}, \text{ если } n - \text{чётное}, \\ \mathrm{P}(M), \text{ если } n - \text{нечётное}. \end{cases}$$

Так как в n-арной группе, в отличие от группы, может быть несколько единиц, то в теории n-арных групп в рамках общей задачи изучения множества всех идемпотентов n-арной группы актуальна также задача изучения множества всех единиц n-арной группы. В данной работе получены новые результаты о множестве всех единиц полиадической группы, арность которой, в частности, имеет вид $p^{\alpha} + 1$, где p – простое.

1 Предварительные сведения

Согласно В. Дёрнте [1], универсальная алгебра $< A, [\ ] >$ с одной n-арной ($n \geq 2$) операцией $[\ ]\colon A^n \to A$ называется n-арной группой, если операция $[\ ]$ ассоциативна и однозначно обратима на каждом месте. На практике иногда удобнее пользоваться определениями n-арной группы, отличными от определения В. Дёрнте. К числу таких определений относятся, например, определения Э. Поста [2], С.А. Русакова [3], А.Н. Скибы и В.И. Тютина [4], А.М. Гальмака [5]. В определениях Э. Поста, А.Н. Скибы и В.И. Тютина обратимость n-арной операции постулируется только на крайних местах или даже на одном месте, отличном от крайнего. В определениях С.А. Русакова и некоторых других авторов помимо n-арной операции присутствует также унарная операция, которую обычно обозначают символом $^-$. В определениях А.М. Гальмака разрешимость уравнений с одной неизвестной заменяется разрешимостью уравнений с любым числом неизвестных, в частности равным $n - 1$.

Приведём несколько примеров n-арных групп, которые будут встречаться в дальнейшем изложении.

***Пример* 1.1.** Определим на группе A n-арную операцию

$$[a_1a_2 \ldots a_n] = a_1a_2 \ldots a_na,$$

© Гальмак А.М., 2014

где a – элемент из центра группы A. Тогда $< A, [\ ] >$ – n-арная группа. В частности, при $a = 1$, где 1 – единица группы A, получаем n-арную группу $< A, [\ ] >$ с n-арной операцией

$$[a_1a_2 \ldots a_n] = a_1a_2 \ldots a_n,$$

которая называется [1] *производной* n-арной группой от группы A.

Рассматривают и более общую ситуацию. n-Арную группу $< A, [\ ] >$ называют [2] *производной* от m-арной группы $<A, (\ ) >$, где $n = s(m–1)+ 1$, $s \ge 1$, если

$$[a_1 \ldots a_n] = ((\ldots ((a_1 \ldots a_m)a_{m+1} \ldots \ldots a_{2m-1}) \ldots)a_{(s-1)(m-1)+2} \ldots a_{s(m-1)+1})$$

для любых $a_1, \ldots, a_n \in A$. Ввиду ассоциативности m-арной операции ( ), правую часть последнего равенства записывают в виде $(a_1 \ldots a_n)$, опуская обозначения внутренних операций. При этом само указанное равенство принимает вид

$$[a_1 \ldots a_n] = (a_1 \ldots a_n).$$

Как показывает следующий пример, n-арную групповую операцию можно построить при помощи групповой операции на множестве, которое относительно групповой операции не является группой.

***Пример* 1.2.** Пусть $\mathbf{D}_n$ – диэдральная группа, то есть полная группа преобразований симметрии правильного n-угольника. Поворот с n-угольника в его плоскости на угол $2\pi/n$ вокруг центра n-угольника порождает циклическую подгруппу

$$\mathbf{C}_n = \{e, c, c^2, \ldots, c^{n-1}\}$$

поворотов. Диэдральная группа содержит еще n отражений. Если b – отражение, то

$$\mathbf{B}_n = \{b, bc, \ldots, bc^{n-1}\}$$

есть множество всех отражений. Определим на $\mathbf{B}_n$ тернарную операцию $[\varphi\psi\theta] = \varphi\psi\theta$. Тогда $< \mathrm{B}_n, [\ ] >$ – тернарная группа [6].

Пусть $< A, [\ ] >$ – n-арная группа, B – подмножество множества A, замкнутое относительно n-арной операции [ ]. В этом случае операция [ ] индуцирует на множестве B n-арную операцию, которую обозначают тем же символом [ ]. Если при этом $< B, [\ ] >$ – n-арная группа, то ее называют n-арной подгруппой n-арной группы $< A, [\ ] >$.

В n-арных группах возникают ситуации, невозможные в группах. Например, группа, в виду наличия в каждой её подгруппе единичного элемента, не может быть объединением своих непересекающихся подгрупп. Однако, при $n \ge 3$ n-арная группа может быть объединением своих непересекающихся n-арных подгрупп.

Так как тернарная группа $< \mathbf{B}_n, [\ ] >$ и тернарная группа $< \mathbf{C}_n, [\ ] >$, производная от группы $\mathbf{C}_n$, не имеют общих элементов, то тернарная группа $< \mathbf{D}_n, [\ ] >$, производная от диэдральной группы $\mathbf{D}_n$, является объединением своих непересекающихся тернарных подгрупп $< \mathbf{B}_n, [\ ] >$ и $< \mathbf{C}_n, [\ ] >$.

Аналогично, тернарная группа $< \mathbf{S}_n [\ ] >$, производная от симметрической группы $\mathbf{S}_n$ является непересекающимся объединением тернарной группы $< \mathbf{A}_n, [\ ] >$, производной от знакопеременной группы $\mathbf{A}_n$, и тернарной группы $< \mathbf{T}_n, [\ ] >$ всех нечётных подстановок.

Точно также, тернарная группа, производная от унимодулярной группы всех матриц порядка n над некоторым полем, определитель которых равен ± 1, является объединением своих непересекающихся тернарных подгрупп: тернарной группы, производной от специальной линейной группы над тем же полем, и тернарной подгруппы всех матриц с определителем равным – 1.

Важными примерами n-арных групп являются n-арные группы n-арных подстановок и n-арные группы n-арных автоморфизмов.

Обозначим через $\mathbf{S}_{A_1, \ldots, A_{n-1}}$ множество всех упорядоченных наборов $(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})$ биекций

$$A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} \ldots \xrightarrow{f_{n-2}} A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} A_1$$

равномощных множеств $A_1, ..., A_{n-1}$. На множестве $\mathbf{S}_{A_1, \ldots, A_{n-1}}$ Э. Пост определил [2] n-арную операцию $[\ ]_n$ следующим образом:

$$[f_1 \ldots f_n]_n = \{g_1, \ldots, g_{n-1}\},$$

где

$$g_j = f_{1j} f_{2(j+1)} \ldots f_{(n-j)(n-1)} f_{(n-j+1)1} \ldots f_{(n-1)(j-1)} f_{nj}.$$

***Теорема* 1.1** [2], [5]. *Универсальная алгебра* $< \mathbf{S}_{A_1, \ldots, A_{n-1}}, [\ ]_n >$ *является n-арной группой.*

Элементы множества $\mathbf{S}_{A_1, \ldots, A_{n-1}}$, в случае конечности множеств $A_1, \ldots, A_{n-1}$, Э. Пост назвал *n-арными подстановками*. Ясно, что при $n = 1$ n-арные подстановки это обычные подстановки, а n-арная группа $< \mathbf{S}_{A_1, \ldots, A_{n-1}}, [\ ]_n >$ совпадает с симметрической группой $\mathbf{S}_{A_1}$.

Если все $A_1, \ldots, A_{n-1}$ – однотипные универсальные алгебры, а все $f_1, \ldots, f_{n-1}$ – изоморфизмы, то упорядоченный набор $(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})$ называется *n-арным автоморфизмом* [5]. Множество всех n-арных автоморфизмов обозначается символом $\mathbf{Aut}(A_1, \ldots, A_{n-1})$.

***Теорема* 1.2** [5]. *Универсальная алгебра* $\mathbf{Aut}(A_1, \ldots, A_{n-1})$ *является n-арной группой.*

n-Арная группа $< A, [\ ] >$ называется *конечной*, если множество A конечно. В этом случае число $|A|$ элементов множества A называется *порядком* n-арной группы $< A, [\ ] >$. Если A – бесконечное множество, то говорят, что она имеет *бесконечный порядок*.

Для n-арных групп имеет место аналог теоремы Лагранжа для групп.

***Теорема* 1.3** [2]. *Порядок конечной n-арной группы делится на порядок любой ее n-арной подгруппы.*

Существуют различные способы построения n-арных групп с помощью групп. Простейший из них – построение производной n-арной группы для данной группы (пример 1.1). Универсальные методы конструирования n-арных групп дает теорема Поста о смежных классах [2] и теорема Поста – Глускина – Хоссу [2], [7], [8]. Укажем еще один общий метод [9] конструирования n-арных групп, подробно описанный в книге [10]. Пусть A – полугруппа, $k \geq 2$, $l \geq 2$, σ – подстановка из $\mathbf{S}_k$. Определим на A^k l-арную операцию

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,k} = (y_1, y_2, \ldots, y_k),$$

где

$$y_j = x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}x_{l\sigma^{l-1}(j)}.$$

***Теорема* 1.4** [9], [10]. *Если A – группа, порядок подстановки σ из $\mathbf{S}_k$ делит $l-1$, то $<A^k, [\ ]_{l,\sigma,k}>$ – l-арная группа.*

Обозначим через $\mathbf{GL}_n(k, P)$ k-ую декартову степень $(\mathbf{GL}_n(P))^k$ полной линейной группы $\mathbf{GL}_n(P)$ над ассоциативным коммутативным кольцом P с единицей. Аналогично, $\mathbf{SL}_n(k, P) = (\mathbf{SL}_n(P))^k$, где $\mathbf{SL}_n(P)$ – специальная линейная группа над P. Если в теореме 1.4 положить вначале $A = \mathbf{GL}_n(P)$, а затем $A = \mathbf{SL}_n(P)$, то получится

***Теорема* 1.5** [11], [12]. *Если порядок подстановки σ из S_k делит $l-1$, то универсальные алгебры $<\mathbf{GL}_n(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k}>$ и $<\mathbf{SL}_n(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k}>$ являются l-арными группами.*

Ясно, что $<\mathbf{SL}_n(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k}>$ – l-арная подгруппа l-арной группы $<\mathbf{GL}_n(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k}>$.

Из теоремы 1.5 при $l = k+1$, $\sigma = (12 \ldots k)$, $P = \mathrm{C}$ – поле комплексных чисел получается следующий результат Э. Поста.

***Теорема* 1.6** [2]. *Универсальная алгебра $<\mathbf{GL}_n(k, \mathrm{C}), [\ ]_{k+1,(12\ldots k),k}>$ является $(k+1)$-арной группой.*

Полиадические операции на множествах упорядоченных наборов матриц изучал также А.К. Слипенко [13], 14].

Если в определении l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$ конечную группу $\mathbf{S}_k$ заменить бесконечной группой $\mathbf{S}_J$, где J – произвольное множество, то получим определение l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,J}$ из [15]. Для этой операции справедливы результаты, обобщающие теоремы 1.4 и 1.5.

2 *n*-Арные аналоги единицы

Как уже отмечалось во введении, в n-арной группе при $n > 2$ может быть только одна единица, но в отличие от бинарного случая, может быть и несколько единиц. Более того, существуют n-арные группы, в которых все элементы являются единицами. Большое число примеров подобного рода имеется в [5], [16].

Существуют также n-арные группы ($n > 2$) любого конечного порядка, в которых вообще нет единиц. Например, в тернарной группе $<\mathbf{B}_n, [\ ]>$ из примера 1.2 все элементы являются идемпотентами, среди которых нет единиц [6]. Не имеют единиц также неодноэлементные n-арные группы $<\mathbf{S}_{A_1,\ldots,A_{n-1}}, [\ ]_n>$ и $\mathbf{Aut}(A_1, \ldots, A_{n-1})$ из теорем 1.1 и 1.2. Если A – неодноэлементная группа, порядок нетождественной подстановки σ из $\mathbf{S}_k$ делит $l-1$, то l-арная группа $<A^k, [\ ]_{l,\sigma,k}>$ из теоремы 1.4 также не имеет единиц [10]. Соответственно, в случае нетождественности подстановки σ, порядок которой делит $l-1$, не имеют единиц [15] и l-арные группы $<\mathbf{GL}_n(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k}>$ и $<\mathbf{SL}_n(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k}>$ из теоремы 1.5, а также [2] $(k+1)$-арная группа $<\mathbf{GL}_n(k, \mathrm{C}), [\ ]_{k+1,(12\ldots k),k}>$ из теоремы 1.6.

В. Дёрнте установил [1], что производные n-арные группы – это в точности n-арные группы с единицами. Конкретно он доказал, что: 1) *если $<A, [\ ]>$ – n-арная группа, производная от бинарной группы A, то единица e группы A является и единицей n-арной группы $<A, [\ ]>$*; 2) *если e – единица n-арной группы $<A, [\ ]>$, то эта n-арная группа является производной от группы $<A, \circ_e>$ с единицей e и бинарной операцией $\circ_e$*:

$$x \circ_e y = [x\underbrace{e\ldots e}_{n-2}y].$$

Кратко критерий В. Дёрнте формулируется следующим образом.

***Теорема* 2.1** [1]. *n-Арная группа является производной от группы тогда и только тогда, когда она обладает единицей.*

При $n \geq 3$ множество всех производных n-арных групп не является многообразием сигнатуры $\{[\ ], ^{-}\}$, так как в производных n-арных группах могут быть n-арные подгруппы, не являющиеся производными от групп. Например, в тернарной группе $<\mathbf{D}_n, [\ ]>$, производной от диэдральной группы $\mathbf{D}_n$, множество $\mathbf{B}_n$ из примера 1.2 является тернарной подгруппой, в которой нет единиц. Как отметил А.Г. Курош в книге [17], множество всех производных n-арных групп можно превратить в многообразие, если сигнатуру $\{[\ ], ^{-}\}$ дополнить нульарной операцией e, а к тождествам, определяющим n-арную группу, добавить тождество $\overline{e} = e$. Последнее тождество равносильно тождеству

$$[\underbrace{e\ldots e}_{n}] = e.$$

Элемент e n-арной группы $<A, [\ ]>$, удовлетворяющий этому тождеству, называется ее *идемпотентом*. n-Арную группу, в которой все элементы являются идемпотентами, называют *идемпотентной*.

Ясно, что идемпотент n-арной группы, как и её единица, является n-арным аналогом единицы группы. Еще одним n-арным аналогом единицы группы является понятие нейтральной последовательности.

Последовательность $e_1 \ldots e_{k(n-1)}$, где $k \geq 1$, элементов n-арной группы $<A, [\ ]>$ называется [2] *нейтральной*, если

$$[e_1 \ldots e_{k(n-1)}x] = [xe_1 \ldots e_{k(n-1)}] = x$$

для любого $x \in A$.

Понятия нейтральной последовательности и единицы n-арной группы являются частными случаями следующего определения.

Последовательность $e_1 \ldots e_{m-1}$ элементов n-арной группы $< A, [\,] >$ называется [18] *m-нейтральной* ($n = k(m-1)+1$, $k \ge 1$), если

$$[\underbrace{e_1 \ldots e_{m-1} \ldots e_1 \ldots e_{m-1}}_{i-1} x \underbrace{e_1 \ldots e_{m-1} \ldots e_1 \ldots e_{m-1}}_{k-i+1}] = x$$

для любого $x \in A$ и любого $i = 1, \ldots, k+1$.

n-Нейтральные последовательности элементов n-арной группы – это в точности ее нейтральные последовательности, а единицы n-арной группы – это в точности ее 2-нейтральные последовательности.

***Теорема* 2.2** [2]. *n-Арная группа является производной от m-арной группы тогда и только тогда, когда она обладает m-нейтральной последовательностью.*

Из этой теоремы при $m = 2$ получается критерий В. Дёрнте (теорема 2.1). Заметим, что Э. Пост при формулировке своего критерия не использовал понятие m-нейтральной последовательности

Одним определением можно объединить также понятия идемпотента и единицы n-арной группы.

Элемент e n-арной группы $< A, [\,] >$, где $n = k(m-1)+1$, $k \ge 1$, называется [18] *m-идемпотентом*, если

$$[\underbrace{\underbrace{e \ldots e}_{m-1} \ldots \underbrace{e \ldots e}_{m-1}}_{i-1} x \underbrace{\underbrace{e \ldots e}_{m-1} \ldots \underbrace{e \ldots e}_{m-1}}_{k-i+1}] = x$$

для любого $x \in A$ и любого $i = 1, \ldots, k+1$.

Легко проверяется, что n-идемпотенты n-арной группы – это в точности ее идемпотенты, а 2-идемпотенты – это в точности ее единицы.

3 Основные результаты

Так как в n-арной группе, в отличие от группы, может быть несколько единиц, то возникает задача изучения множества $\mathbf{E}(A)$ всех единиц произвольной n-арной группы $< A, [\,] >$. Строение множества $\mathbf{E}(A)$ подробно изучено в [5], [16]. Здесь же напомним только некоторые результаты. Для этого нам понадобится понятие центра n-арной группы. *Центром* n-арной группы $< A, [\,] >$ называется [2] множество $\mathbf{Z}(A)$ всех её элементов z таких, что

$$[zx_1x_2 \ldots x_{n-1}] = [x_1zx_2 \ldots x_{n-1}] = \ldots$$
$$\ldots = [x_1 \ldots x_{n-2}zx_{n-1}] = [x_1x_2 \ldots x_{n-1}z]$$

для всех $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \in A$. Э. Пост установил [2], что $< \mathbf{Z}(A), [\,] >$ – n-арная подгруппа n-арной группы $< A, [\,] >$.

***Замечание* 3.1.** *Центр $\mathbf{Z}(A)$ n-арной группы $< A, [\,] >$ производной от группы A совпадает с центром группы A* [5, 16]. Поэтому можно употреблять общее обозначение $\mathbf{Z}(A)$ и для центра n-арной группы $< A, [\,] >$ и для центра группы A.

***Теорема* 3.1** [5], [16]. *Если* $\mathbf{E}(A) \ne \varnothing$, *то* $< \mathbf{E}(A), [\,] >$ *– характеристическая n-арная подгруппа n-арной группы $< A, [\,] >$, лежащая в её центре.*

Если $\mathbf{E}(A) \ne \varnothing$, то n-арную подгруппу $< \mathbf{E}(A), [\,] >$ называют *n-арной подгруппой единиц* n-арной группы $< A, [\,] >$.

Ясно, что если $e \in \mathbf{E}(A)$, то $< \{e\}, [\,] >$ – n-арная подгруппа в $< \mathbf{E}(A), [\,] >$.

В n-арной подгруппе единиц при $n > 2$ могут существовать n-арные подгруппы, отличные от одноэлементных и от самой n-арной подгруппы $< \mathbf{E}(A), [\,] >$.

***Предложение* 3.1** [5, 16]. *Если* $< A, [\,] >$ *– тернарная группа*, $e_1, e_2 \in \mathbf{E}(A)$, то $< \{e_1, e_2\}, [\,] >$ *– тернарная подгруппа тернарной группы* $< \mathbf{E}(A), [\,] >$.

***Следствие* 3.1** [5, 16]. *Если конечная тернарная группа содержит более одной единицы, то её тернарная подгруппа единиц, её центр и она сама имеют четные порядки.*

***Предложение* 3.2** [5, 16]. *Если a, b, c – различные единицы тернарной группы $< A, [\,] >$, то $< \{a, b, c, [abc]\}, [\,] >$ – тернарная подгруппа четвертого порядка в $< \mathbf{E}(A), [\,] >$.*

***Следствие* 3.2.** *Если конечная тернарная группа содержит более двух единиц, то порядки её тернарной подгруппы единиц, её центра и её самой делятся на* 4.

***Теорема* 3.2** [5, 16]. *Если $< A, [\,] >$ – n-арная группа, производная от группы A с единицей e, то*

$$\mathbf{E}(A) = \{a \in \mathbf{Z}(A) \mid a^{n-1} = e\}.$$

Теорема 3.1 впервые была опубликована в 1998 году в препринте [16]. После этого некоторые авторы, знакомые с результатами работы [16], стали включать эту теорему, а также следствие 3.1 и предложение 3.1 в свои статьи без ссылок на препринт [16].

Покажем, что предложения 3.1 и 3.2, а также следствия 3.1 и 3.2 являются частными случаями более общих результатов, которые мы приведем ниже.

***Замечание* 3.2.** *Любой идемпотент n-арной группы $< A, [\,] >$, производной от группы A, имеет в группе A порядок, делящий* $n-1$. Действительно, если a – идемпотент в $< A, [\,] >$, то из

$$[\underbrace{a \ldots a}_{n}] = a$$

следует $a^n = a$, откуда $a^{n-1} = e$, где e – единица группы A.

***Замечание* 3.3.** Простой проверкой устанавливается следующий факт. *Если $< A, [\,] >$ – n-арная группа, производная от группы A, B – подгруппа в A, то $< B, [\,] >$ – n-арная подгруппа в $< A, [\,] >$.*

Если $< A, [\,] >$ – n-арная группа, $M \subseteq A$, то пересечение всех n-арных подгрупп n-арной группы $< A, [\,] >$, содержащих множество M, называют [3] n-арной подгруппой, *порожденной* множеством M.

В формулировке следующего предложения присутствует полуциклическая n-арная группа.

Соответствующее определение есть в [18]. Здесь же отметим, что согласно этому определению, n-арная группа $< A, [\ ] >$, производная от группы A с единицей e, является полуциклической тогда и только тогда, когда группа $< A, \circ_e >$ циклическая.

***Предложение* 3.3.** *Пусть* $< A, [\ ] >$ *– n-арная группа, производная от группы A с единицей e, элемент* $a \in A$ *является идемпотентом в* $< A, [\ ] >$ *и имеет в группе A порядок* $r \geq 1$, *пусть также*

$$< e, a > = \{a_i = [\underbrace{e \ldots e}_{n-i}\underbrace{a \ldots a}_{i}] \mid i = 1, \ldots, r\}.$$

Тогда: $< e, a >$ *– циклическая подгруппа порядка r группы A, порождаемая элементом a*; $<< e, a >, [\ ] >$ *– полуциклическая идемпотентная n-арная подгруппа порядка r n-арной группы* $< A, [\ ] >$, *порождаемая при* $r > 1$ *двухэлементным множеством* $\{e, a\}$.

Доказательство. Равенства, определяющие элементы a_i, корректны, так как, согласно замечанию 3.2, r не превосходит $n - 1$. Если $r = 1$, то $< e, a > = \{a = e\}$, $<< e, a >, [\ ] >$ – одноэлементная n-арная подгруппа в $< A, [\ ] >$. Поэтому считаем $r > 1$.

Так как

$$a_i = e^{n-i}a^i = a^i, \ i = 1, \ldots, r,$$

то

$$a_1 = a, a_2 = a^2, \ldots, a_{r-1} = a^{r-1}, a_r = a^r = e.$$

А так как r – порядок элемента a в группе A, то во множестве $< e, a >$ все элементы различны, а само оно является циклической подгруппой порядка r группы A. Согласно замечанию 3.3, $<< e, a >, [\ ] >$ n-арная подгруппа в $< A, [\ ] >$. Легко проверяется, что n-арная группа, производная от циклической группы, является полуциклической. Поэтому $<< e, a >, [\ ] >$ – полуциклическая.

Так как a – идемпотент, то для любого $i = 1, \ldots, r$ имеем

$$[\underbrace{a_i \ldots a_i}_{n}] = a_i^n = (a^i)^n = (a^n)^i = ([\underbrace{a \ldots a}_{n}])^i = a^i = a_i,$$

то есть

$$[\underbrace{a_i \ldots a_i}_{n}] = a_i.$$

Следовательно, a_i – идемпотент.

Обозначим через $< D, [\ ] >$ n-арную подгруппу, порождённую в $< A, [\ ] >$ множеством $\{e, a\}$. Ясно, что $D \subseteq < e, a >$. Если $< H, [\ ] >$ – любая n-арная подгруппа в $< A, [\ ] >$, включающая множество $\{e, a\}$, то из равенств, определяющих элементы a_i, в виду замкнутости множества H относительно операции $[\ ]$, следует $< e, a > \subseteq H$. Следовательно, $< e, a > \subseteq D$. Из полученных включений следует равенство $< e, a > = D$. Предложение доказано.

***Замечание* 3.4.** Утверждение предложения 3.3 о полуцикличности n-арной подгруппы $<< e, a >, [\ ] >$ и её порождаемости при $r > 1$ двухэлементным множеством $\{e, a\}$ может быть получено применением следующей леммы.

***Лемма* 3.1.** *n-Арная группа* $< A, [\ ] >$, *производная от циклической группы A с единицей e и порождающим элементом* $a \in A$, *является полуциклической, порождаемой множеством* $\{e, a\}$.

***Теорема* 3.3.** *Пусть n-арная группа* $< A, [\ ] >$ *имеет более одной единицы. Тогда*:

1) *если зафиксировать единицу* $e \in \mathbf{E}(A)$, *то любая единица* $a \in \mathbf{E}(A)$, *отличная от e, имеет в группе* $< A, \circ_e >$ *порядок* $r > 1$, *делящий* $n - 1$;

2) *если порядки всех элементов в группе* $< \mathbf{E}(A), \circ_e >$ *ограничены в совокупности, то период группы* $< \mathbf{E}(A), \circ_e >$ *делит* $n - 1$;

3) *если* $< \mathbf{E}(A), [\ ] >$ *– конечная, то период группы* $< \mathbf{E}(A), \circ_e >$ *является общим делителем порядка n-арной группы* $< \mathbf{E}(A), [\ ] >$ *и числа* $n - 1$.

Доказательство. Так как в $< A, [\ ] >$ более одной единицы, то $n \geq 3$.

1) По теореме 2.1 n-арная группа $< A, [\ ] >$ является производной от группы $< A, \circ_e >$ с единицей e. Так как $e \neq a$, то в группе $< A, \circ_e >$ элемент a имеет порядок $r > 1$, который, ввиду замечания 3.2, делит $n - 1$.

2) Вытекает из 1) и определения периода группы.

3) Вытекает из 2) и того факта, что период любой конечной группы делит её порядок. Теорема доказана.

Полагая в теореме 3.3 $n = p^\alpha + 1$, где p – простое, получим

***Следствие* 3.3.** *Пусть* $(p^\alpha + 1)$*-арная группа* $< A, [\ ] >$, *где p – простое,* $\alpha \geq 1$, *имеет более одной единицы. Тогда*:

1) *если зафиксировать единицу* $e \in \mathbf{E}(A)$, *то любая единица* $a \in \mathbf{E}(A)$, *отличная от e, имеет в группе* $< A, \circ_e >$ *порядок* p^β, *где* $1 \leq \beta \leq \alpha$;

2) *если порядки всех элементов в группе* $< \mathbf{E}(A), \circ_e >$ *ограничены в совокупности, то период группы* $< \mathbf{E}(A), \circ_e >$ *является степенью p*;

3) *если* $< \mathbf{E}(A), [\ ] >$ *– конечная, то ее порядок является степенью p.*

***Замечание* 3.5.** Утверждение 3) следствия 3.3 вытекает из утверждения 1) этого же следствия, так как конечная группа, в которой порядки всех элементов являются степенью некоторого простого числа, имеет порядок, являющийся степенью того же простого числа.

Из теоремы 3.1 и утверждения 3) следствия 3.3 вытекает

***Следствие* 3.4.** *Если конечная* $(p^\alpha + 1)$*-арная группа* $< A, [\ ] >$, *где p – простое,* $\alpha \geq 1$, *имеет более одной единицы, то порядки её* $(p^\alpha + 1)$*-арной подгруппы единиц, её центра и её самой делятся на p.*

При $p = 2$, $\alpha = 1$ из следствия 3.4 получается следствие 3.1.

Так как n-арная подгруппа $<\mathbf{E}(A), [\ ]>$ n-арной группы $<A, [\ ]>$ является производной от группы $<\mathbf{E}(A), \circ_u>$ с единицей u для любого $u \in \mathbf{E}(A)$, то из предложения 3.3 легко извлекается ещё одно

***Предложение* 3.4.** *Если n-арная группа $<A, [\ ]>$ имеет более одной единицы, то любые две различные единицы $u, v \in \mathbf{E}(A)$ порождают в $<\mathbf{E}(A), [\ ]>$ полуциклическую n-арную подгруппу $<<u, v>, [\ ]>$ порядка $r > 1$, где*

$$<u, v> = \{[\underbrace{u \ldots u}_{n-i}\underbrace{v \ldots v}_{i}] \mid i = 1, \ldots, r\}.$$

r – порядок элемента v в группе $<A, \circ_u>$.

Предложение 3.4 и замечание 3.2 позволяют сформулировать следующую теорему.

***Теорема* 3.4.** *Если $(p+1)$-арная группа $<A, [\ ]>$, где p – простое, имеет более одной единицы, то любые две различные единицы $u, v \in \mathbf{E}(A)$ порождают в $<\mathbf{E}(A), [\ ]>$ полуциклическую $(p+1)$-арную подгруппу $<<u, v>, [\ ]>$ порядка p, где*

$$<u, v> = \{[\underbrace{u \ldots u}_{p+1-i}\underbrace{v \ldots v}_{i}] \mid i = 1, \ldots, p\}.$$

Предложение 3.1 получается из теоремы 3.4 при $p = 2$.

***Замечание* 3.6.** Пусть $<A, [\ ]>$ – n-арная группа из теоремы 3.4, u – фиксированная единица из $\mathbf{E}(A)$. Так как любой элемент v из $\mathbf{E}(A)$, отличный от u, имеет в группе $<\mathbf{E}(A), \circ_u>$ порядок p, то $<\mathbf{E}(A), \circ_u>$ – элементарная абелева p-группа.

***Предложение* 3.5.** *Пусть $k \geq 1$, $<A, [\ ]>$ – n-арная группа, $u, v_1, \ldots, v_k$ – её единицы ($v_1 \neq u, \ldots, v_k \neq u$), $r_1, \ldots, r_k$ – соответственно порядки элементов $v_1, \ldots, v_k$ в группе $<A, \circ_u>$; для любого $j = 1, \ldots, k$ положим*

$$<u, v_j> = \{[\underbrace{u \ldots u}_{n-i}\underbrace{v_j \ldots v_j}_{i}] \mid i = 1, \ldots, r_j\},$$

$$<u, v_1, \ldots, v_j> =$$
$$= [<u, v_1>\underbrace{u \ldots u}_{n-2}<u, v_2>\underbrace{u \ldots u}_{n-2} \ldots \underbrace{u \ldots u}_{n-2}<u, v_j>].$$

Тогда для любого $j = 1, \ldots, k$ справедливы следующие утверждения:

1) $<<u, v_j>, [\ ]>$ – полуциклическая n-арная подгруппа в $<\mathbf{E}(A), [\ ]>$ порядка $r_j > 1$;

2) $<<u, v_1, \ldots, v_j>, [\ ]>$ – n-арная подгруппа в $<\mathbf{E}(A), [\ ]>$, порождаемая множеством $\{u, v_1, \ldots, v_j\}$, и имеющая порядок, который является делителем числа $r_1r_2 \ldots r_j$;

3) $<u, v_1, \ldots, v_{j-1}> \subseteq <u, v_1, \ldots, v_j>$.

Доказательство. Так как в $<A, [\ ]>$ более одной единицы, то $n \geq 3$.

1) По предложению 3.4 для любого $j = 1,\ldots,k$ $<<u, v_j>, [\ ]>$ – полуциклическая n-арная подгруппа в $<\mathbf{E}(A), [\ ]>$ порядка $r_j > 1$.

2) Так как $<<u, v_l>, \circ_u>$ и $<<u, v_m>, \circ_u>$ – перестановочные подгруппы в группе $<\mathbf{E}(A), \circ_u>$ для любых $l, m = 1, \ldots, k$, то произведение

$$<<u, v_1> \circ_u <u, v_2> \circ_u \ldots \circ_u <u, v_j>>$$

является подгруппой в $<\mathbf{E}(A), \circ_u>$, порядок которой делит произведение $r_1r_2 \ldots r_j$.

А так как

$$<u, v_1> \circ_u <u, v_2> \circ_u \ldots \circ_u <u, v_j> =$$
$$= [<u, v_1>\underbrace{u \ldots u}_{n-2}<u, v_2>\underbrace{u \ldots u}_{n-2} \ldots \underbrace{u \ldots u}_{n-2}<u, v_j>],$$

то $<<u, v_1, \ldots, v_j>, \circ_u>$ – подгруппа в $<\mathbf{E}(A), \circ_u>$, порядок которой делит произведение $r_1r_2 \ldots r_j$. Тогда, согласно замечанию 3.3,

$$<<u, v_1, \ldots, v_j>, [\ ]>$$

– n-арная подгруппа в $<\mathbf{E}(A), [\ ]>$. Кроме того, из определения множества $<u, v_1, \ldots, v_j>$ следует

$$\{u, v_1, \ldots, v_j\} \subseteq <u, v_1, \ldots, v_j>.$$

Таким образом, обозначив через $<D, [\ ]>$ n-арную подгруппу, порождённую в $<\mathbf{E}(A), [\ ]>$ множеством $\{u, v_1, \ldots, v_j\}$, получим включение $D \subseteq <u, v_1, \ldots, v_j>$. Если теперь $<H, [\ ]>$ – любая n-арная подгруппа в $<\mathbf{E}(A), [\ ]>$, включающая множество $\{u, v_1, \ldots, v_j\}$, то из равенства, определяющего множество $<u, v_1, \ldots, v_j>$, в виду замкнутости множества H относительно операции $[\ ]$, следует $<u, v_1, \ldots, v_j> \subseteq H$. Следовательно, $<u, v_1, \ldots, v_j> \subseteq D$. Из полученных включений следует равенство $<u, v_1, \ldots, v_j> = D$.

3) Заметим, что при $j = 1$ левая часть доказываемого равенства не определена. Поэтому считаем $j = 2, \ldots, k$.

Так как $u \in <u, v_j>$, то

$$[<u, v_1>\underbrace{u \ldots u}_{n-2} \ldots \underbrace{u \ldots u}_{n-2}<u, v_{j-1}>] =$$
$$= [<u, v_1>\underbrace{u \ldots u}_{n-2} \ldots \underbrace{u \ldots u}_{n-2}<u, v_{j-1}>\underbrace{u \ldots u\, u}_{n-2}] \subseteq$$
$$\subseteq [<u, v_1>\underbrace{u \ldots u}_{n-2} \ldots \underbrace{u \ldots u}_{n-2}<u, v_{j-1}>\underbrace{u \ldots u}_{n-2}<u, v_j>].$$

Следовательно, верно доказываемое равенство. Предложение доказано.

***Замечание* 3.7.** В предложении 3.5 некоторые или даже все единицы из множества $\{v_1, \ldots, v_k\}$ могут совпадать.

Полагая в предложении 3.5 $k = 2$, получим

***Следствие* 3.5.** *Пусть $<A, [\ ]>$ – n-арная группа, u, v и w – её единицы ($v \neq u$, $w \neq u$), r и s – соответственно порядки элементов v и w в группе $<A, \circ_u>$; положим*

$$<u, v> = \{[\underbrace{u \ldots u}_{n-i}\underbrace{v \ldots v}_{i}] \mid i = 1, \ldots, r\},$$

$$<u, w> = \{[\underbrace{u \ldots u}_{n-i}\underbrace{w \ldots w}_{i}] \mid i = 1, \ldots, s\},$$

$$<u, v, w> = [<u, v>\underbrace{u \ldots u}_{n-2}<u, w>].$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $<<u, v>, [\ ]>$ и $<<u, w>, [\ ]>$ – полуциклические n-арные подгруппы в $<\mathbf{E}(A), [\ ]>$ порядков r и s – соответственно;

2) $<<u, v, w>, [\ ]>$ – n-арная подгруппа в $<\mathbf{E}(A), [\ ]>$, порождаемая множеством $\{u, v, w\}$, *и имеющая порядок, который является делителем числа* rs;

3) $< u, v > \subseteq < u, v, w >$.

***Замечание* 3.8.** Так как подгруппы

$$<< u, v >, \circ_u > \text{ и } << u, w >, \circ_u >$$

из следствия 3.5 перестановочны, то

$$< u, v, w > = [< u, w > \underbrace{u \ldots u}_{n-2} < u, v >],$$

$$< u, v, w > = [\underbrace{u \ldots u}_{n-2} < u, w >< u, v >],$$

$$< u, v, w > = [\underbrace{u \ldots u}_{n-2} < u, v >< u, w >],$$

$$< u, v, w > = [< u, v >< u, w > \underbrace{u \ldots u}_{n-2}],$$

$$< u, v, w > = [< u, w >< u, v > \underbrace{u \ldots u}_{n-2}].$$

Аналогично, все n-арные подгруппы, стоящие под знаком n-арной операции в правой части равенства, определяющего множество $< u, v_1, \ldots, v_j >$ в предложении 3.5, могут быть переставлены произвольным образом.

***Теорема* 3.5.** *Пусть* $k \geq 1$, p *– простое*, $< A, [\ ] >$ *–* $(p+1)$*-арная группа*, $u, v_1, \ldots, v_k$ *– её единицы; для любого* $j = 1, \ldots, k$ *положим*

$$< u, v_j > = \{[\underbrace{u \ldots u}_{p+1-i} \underbrace{v_j \ldots v_j}_{i}] \mid i = 1, \ldots, p\},$$

$$< u, v_1, \ldots, v_j > =$$

$$=[< u, v_1 > \underbrace{u \ldots u}_{p-1} < u, v_2 > \underbrace{u \ldots u}_{p-1} \ \ldots \ \underbrace{u \ldots u}_{p-1} < u, v_j >];$$

пусть также

$$v_1 \neq u,\ v_j \notin < u, v_1, \ldots, v_{j-1} >,\ j = 2, \ldots, k.$$

Тогда для любого $j = 1, \ldots, k$ *справедливы следующие утверждения*:

1) $<< u, v_j >, [\ ] >$ *– полуциклическая* $(p+1)$*-арная подгруппа в* $< \mathbf{E}(A), [\ ] >$ *порядка* p;

2) $<< u, v_1, \ldots, v_j >, [\ ] >$ *–* $(p+1)$*-арная подгруппа в* $< \mathbf{E}(A), [\ ] >$ *порядка* p^j, *порождаемая множеством* $\{u, v_1, \ldots, v_j\}$;

3) $< u, v_1, \ldots, v_{j-1} > \subset < u, v_1, \ldots, v_j >$.

Доказательство. 1) По условию теоремы $v_1 \neq u$. Кроме того, из равенства, определяющего множество $< u, v_1, \ldots, v_j >$ следует

$$\{u, v_1, \ldots, v_j\} \subseteq < u, v_1, \ldots, v_j >,\ j = 1, \ldots, k,$$

откуда, полагая $j = 2, \ldots, k$ в условии

$$v_j \notin < u, v_1, \ldots, v_{j-1} >,$$

получаем $v_2 \neq u, \ldots, v_k \neq u$. Таким образом, $v_1 \neq u, v_2 \neq u, \ldots, v_k \neq u$. Поэтому, согласно утверждению 1) теоремы 3.3, порядки элементов $v_1, \ldots, v_k$ в группе $< A, \circ_u >$ равны p. Тогда, согласно утверждению 1) предложения 3.5, для любого $j = 1, \ldots, k$ $<< u, v_j >, [\ ] >$ – полуциклическая $(p+1)$-арная подгруппа в $< \mathbf{E}(A), [\ ] >$ порядка p.

2) Согласно утверждению 2) предложения 3.5, $<< u, v_1, \ldots, v_j >, [\ ] >$ – $(p+1)$-арная подгруппа в $< \mathbf{E}(A), [\ ] >$, порождаемая множеством $\{u, v_1, \ldots, v_j\}$.

Так как $u \in < u, v_1, v_2 >$, то $<< u, v_1, v_2 >, \circ_u >$ – подгруппа в $< \mathbf{E}(A), \circ_u >$. Кроме того, так как

$$< u, v_1, v_2 > = [< u, v_1 > \underbrace{u \ldots u}_{p-1} < u, v_2 >],$$

то

$$< u, v_1, v_2 > = < u, v_1 > \circ_u < u, v_2 >,$$

где $<< u, v_1 >, \circ_u >$ и $<< u, v_2 >, \circ_u >$ – подгруппы порядка p группы $<< u, v_1, v_2 >, \circ_u >$. Если указанные подгруппы пересекаются по единице u, то из последнего равенства следует, что порядок группы $<< u, v_1, v_2 >, \circ_u >$, а значит и $(p+1)$-арной группы $<< u, v_1, v_2 >, [\ ] >$ равен p^2. Если же пересечение указанных подгрупп отлично от единицы u, то, ввиду простоты их порядков, $< u, v_1 > = < u, v_2 >$, что противоречит условию $v_2 \notin < u, v_1 >$.

Рассуждая аналогично, устанавливаем, что порядок $(p+1)$-арной группы $<< u, v_1, \ldots, v_{k-1} >, [\ ] >$ равен p^{k-1}.

Так как

$$u \in < u, v_1, \ldots, v_k >,$$

то $<< u, v_1, \ldots, v_k >, \circ_u >$ – подгруппа в $< \mathbf{E}(A), \circ_u >$. Кроме того, так как

$$< u, v_1, \ldots, v_k > = [< u, v_1, \ldots, v_{k-1} > \underbrace{u \ldots u}_{p-1} < u, v_k >],$$

то

$$< u, v_1, \ldots, v_k > = < u, v_1, \ldots, v_{k-1} > \circ_u < u, v_k >,$$

где $<< u, v_1, \ldots, v_{k-1} >, \circ_u >$ и $<< u, v_k >, \circ_u >$ – подгруппы в $<< u, v_1, \ldots, v_k >, \circ_u >$ соответственно порядков p^{k-1} и p. Если указанные подгруппы пересекаются по единице u, то из последнего равенства следует, что порядок группы $<< u, v_1, \ldots, v_k >, \circ_u >$, а значит и $(p+1)$-арной группы $<< u, v_1, \ldots, v_k >, [\ ] >$ равен p^k. Если же пересечение указанных подгрупп отлично от единицы u, то, ввиду простоты порядка группы $<< u, v_k >, \circ_u >$, $< u, v_k > \subseteq < u, v_1, \ldots, v_{k-1} >$, что противоречит условию $v_k \notin < u, v_1, \ldots, v_{k-1} >$.

3) Применяется утверждение 3) предложения 3.5 и утверждение 2) данного предложения. Теорема доказана.

4 Некоторые следствия из теоремы 3.5

Полагая в теореме 3.5 $k = 2$, получим

***Следствие* 4.1.** *Пусть* p *– простое*, $< A, [\ ] >$ *–* $(p+1)$*-арная группа*, u, v *и* w *– её единицы; положим*

$$< u, v > = \{[\underbrace{u \ldots u}_{p+1-i} \underbrace{v \ldots v}_{i}] \mid i = 1, \ldots, p\},$$

$$< u, w > = \{[\underbrace{u \ldots u}_{p+1-i} \underbrace{w \ldots w}_{i}] \mid i = 1, \ldots, p\},$$

$$< u, v, w > = [< u, v > \underbrace{u \ldots u}_{p-1} < u, w >];$$

пусть также $v \neq u$, $w \notin < u, v >$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $<< u, v >, [\ ] >$ *и* $<< u, w >, [\ ] >$ *– полуциклические* $(p+1)$*-арные подгруппы в* $< \mathbf{E}(A), [\ ] >$ *порядка* p;

2) $<< u, v, w >, [\,] >$ – $(p+1)$*-арная подгруппа в* $<\mathbf{E}(A), [\,]>$ *порядка* p^2, *порождаемая множеством* $\{u, v, w\}$;

3) $< u, v > \subset < u, v, w >$.

Если в следствии 4.1 положить $p = 2$, то

$$< u, v > = \{u, v\}, < u, w > = \{u, w\},$$
$$< u, v, w > = [< u, v >u< u, w >] =$$
$$= [\{u, v\}u\{u, w\}] =$$
$$= \{[uuu], [uuw], [vuu], [vuw]\}=$$
$$= \{u, w, v, [vuw]\}.$$

Так как условие $v \neq u$, $w \notin < u, v >$ равносильно условию $v \neq u$, $w \neq u$, $w \neq v$ и, кроме того, по следствию 4.1 $< u, v, w >$ – четырёхэлементное множество, то предложение 3.2 вытекает из следствия 4.1.

***Следствие* 4.2.** *Если* a, b, c, d *– различные единицы тернарной группы* $< A, [\,] >$, *причём*, $d \neq [abc]$, *то*

$$< \{a, b, c, d, [abc], [abd], [acd], [bcd]\}, [\,] >$$

– тернарная подгруппа восьмого порядка в $<\mathbf{E}(A), [\,]>$.

Доказательство. Положим в теореме 3.5 $k = 3$, $p =2$,

$$u = a, v_1 = b, v_2 = c, v_3 = d \neq [abc].$$

Тогда

$$< u, v_1 > = \{a, b\}, < u, v_2 > =$$
$$= \{a, c\}, < u, v_3 > = \{a, d\},$$
$$< u, v_1, v_2 > = [< a, b >a< a, c >] = \{a, b, c, [abc]\}.$$

Согласно утверждению 2) теоремы 3.5, $<< u, v_1, v_2, v_3 >, [\,] >$ – тернарная подгруппа в $<\mathbf{E}(A), [\,]>$ порядка $2^3 = 8$, где

$$< u, v_1, v_2, v_3 > = [< u, v_1, v_2 >u< u, v_3 >] =$$
$$[\{a, b, c, [abc]\}a\{a, d\}] =$$
$$= \{a, b, c, d, [abc], [abd], [acd], [bcd]\}.$$

Следствие доказано.

***Следствие* 4.3.** *Если конечная тернарная группа имеет более четырёх единиц, то порядки её тернарной подгруппы единиц, её центра и её самой делятся на* 8.

***Следствие* 4.4.** *Если* u, v *и* w *– такие единицы* 4*-арной группы* $< A, [\,] >$, *что*

$$v \neq u, w \neq u, w \neq v, w \neq [uuvv],$$

то

$$< \{u, v, w, [uuvv], [uuww], [vvww],$$
$$[uuvw], [uvww], [uvvw], [\,] >$$

– 4-арная подгруппа девятого порядка в $<\mathbf{E}(A), [\,]>$.

Доказательство. Положим в следствии 4.1 $p = 3$. Тогда

$$< u, v > = \{u, v, [uuvv]\}, < u, w > = \{u, w, [uuww]\}.$$

Согласно утверждению 2) следствия 4.1, $<< u, v, w >, [\,] >$ – 4-арная подгруппа в $<\mathbf{E}(A), [\,]>$ порядка $3^2 = 9$, где

$$< u, v, w > = [< u, v >uu< u, w >] =$$
$$= [\{u, v, [uuvv]\}uu\{u, w, [uuww]\}] =$$
$$= \{[uuuu], [uuuw], [uuu[uuww]],$$
$$[vuuu], [vuuw], [vuu[uuww]],$$
$$[[uuvv]uuu], [[uuvv]uuw], [[uuvv]uu[uuww]]\}=$$
$$= \{u, w, [uuww], v, [uuvw], [uvww],$$
$$[uuvv], [uvvw], [vvww]\}.$$

Следствие доказано.

***Следствие* 4.5.** *Если конечная* 4*-арная группа имеет более трёх единиц, то порядки её* 4*-арной подгруппы единиц, её центра и её самой делятся на* 9.

Следствия 3.1, 3.2, 4.3 и 4.5 вытекают из следующего более общего утверждения.

***Предложение* 4.1.** *Если* $k \geq 1$, p *– простое, конечная* $(p+1)$*-арная группа* $< A, [\,] >$ *имеет более* p^{k-1} *единиц, то порядки её* $(p+1)$*-арной подгруппы единиц, её центра и её самой делятся на* p^k.

Доказательство. Зафиксируем две различные единицы u, v_1 из $\mathbf{E}(A)$. По теореме 3.5 множество $< u, v_1 >$ содержит p различных единиц. Выберем в $\mathbf{E}(A)$ единицу $v_2 \notin < u, v_1 >$ и применим теорему 3.5 при $k = j = 2$. Согласно утверждению 2) этой теоремы, множество $< u, v_1, v_2 >$ содержит p^2 различных единиц. Продолжая, получим $k - 1$ единиц $v_1, \ldots, v_{k-1}$ из $\mathbf{E}(A)$ таких, что множество $< u, v_1, \ldots, v_{k-1} >$ содержит p^{k-1} различных единиц. Если теперь выбрать в $\mathbf{E}(A)$ единицу $v_k \notin < u, v_1, \ldots, v_{k-1} >$ и применить теорему 3.5 при $j = k$, то согласно утверждению 2) этой теоремы, множество $< u, v_1, \ldots, v_k >$ содержит p^k различных единиц из $\mathbf{E}(A)$. Осталось применить теоремы 3.1 и 1.3. Предложение доказано.

Сформулируем следствия из предложения 4.1 для $k = 1$ и $k = 2$.

***Следствие* 4.6.** *Если конечная* $(p+1)$*-арная группа, где* p *– простое, имеет более одной единицы, то порядки её* $(p+1)$ *–арной подгруппы единиц, её центра и её самой делятся на* p.

***Следствие* 4.7.** *Если конечная* $(p+1)$*-арная группа, где* p *– простое, имеет более* p *единиц, то порядки её* $(p+1)$*-арной подгруппы единиц, её центра и её самой делятся на* p^2.

Следствие 3.1 получается из следствия 4.6 при $p = 2$. Заметим, что само следствие 4.6 вытекает не только из предложения 4.1, но и из следствия 3.4 при $\alpha = 1$. Следствия 3.2 и 4.5 получаются из следствия 4.7 при $p = 2$ и $p = 3$ соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dörnte*, *W.* Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegrieff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.

2. *Post*, *E.L.* Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.

3. *Русаков*, *С.А.* Алгебраические n-арные системы / С.А. Русаков. – Мн. : Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.

4. *Тютин*, *В.И.* К аксиоматике n-арных групп / В.И. Тютин // Докл. АН БССР. – 1985. – Т. 29, № 8. – С. 691–693.

5. *Гальмак*, *А.М.* n-Арные группы. Часть 2 / А.М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2007. – 324 с.

6. *Гальмак*, *А.М.* Тернарные группы отражений / А.М. Гальмак, Г.Н. Воробьев. – Минск : Беларуская навука, 1998. – 128 с.

7. *Глускин*, *Л.М.* Позиционные оперативы / Л.М. Глускин // Мат.сборник. – 1965. – Т. 68 (110), № 3. – С. 444–472.

8. *Hosszu*, *M.* On the explicit form of *n*-group operations / M. Hosszu // Publ. Math. – 1963. – Vol. 10, № 1–4. – P. 88–92.

9. *Гальмак*, *А.М.* Многоместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28–34.

10. *Гальмак*, *А.М.* Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.

11. *Гальмак*, *А.М.* Транспонированные вектор-матрицы / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 1 (6). – С. 52–56.

12. *Гальмак*, *А.М.* Вектор-определители и определители вектор-матриц / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 2 (7). – С. 58–64.

13. *Слипенко*, *А.К.* Абстрактная характеристика матричных оперативов / А.К. Слипенко // Укр. мат. журнал. – 1974. – Т. 26, № 1. – С. 112–114.

14. *Слипенко*, *А.К.* Про матрични оперативи / А.К. Слипенко // Доповіді АН УССР. – 1975. – А, № 3. – С. 207–208.

15. *Гальмак*, *А.М.* Многоместные операции на множествах функций / А.М. Гальмак, Ю.И Кулаженко. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2013. – 192 с.

16. *Гальмак*, *А.М.* *n*-Арная подгруппа единиц / А.М. Гальмак // Препринт ГГУ им. Ф. Скорины. – 1998. – № 77. – 23 с.

17. *Курош*, *А.Г.* Общая алгебра : Лекции 1969/70 учебного года / А.Г. Курош. – М. : Наука, 1974. – 160 с.

18. *Гальмак*, *А.М.* *n*-Арные группы. Часть 1 / А.М. Гальмак. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 202 с.

Поступила в редакцию 15.10.13.